

# Teoria grafów dla małych

Andrzej P. Urbański  
Instytut Informatyki  
Politechnika Poznańska

## Wstęp

Matematyka w szkole podstawowej kojarzy się przede wszystkim z arytmetyką, ale współcześni matematycy rzadko nią się zajmują. Wynika to stąd, że arytmetyka pozwala spojrzeć na rzeczywistość zaledwie z jednego, bardzo wąskiego, punktu widzenia, a współczesna rzeczywistość jest bardzo skomplikowana i wymaga rozważenia różnych punktów widzenia.

Takim innym punktem widzenia jest teoria grafów, która najprościej rzecz ujmując zajmuje się opisywaniem połączeń między rzeczami. Z teoretycznego punktu widzenia obojętne jest czy rzeczami są domy łączące się siecią ulic, czy komputery połączone kablami lub satelitami w sieć komputerową. Podobnie jak obojętne jest czy liczymy domy lub odległości pomiędzy domami czy robimy to samo z komputerami w przypadku arytmetyki.

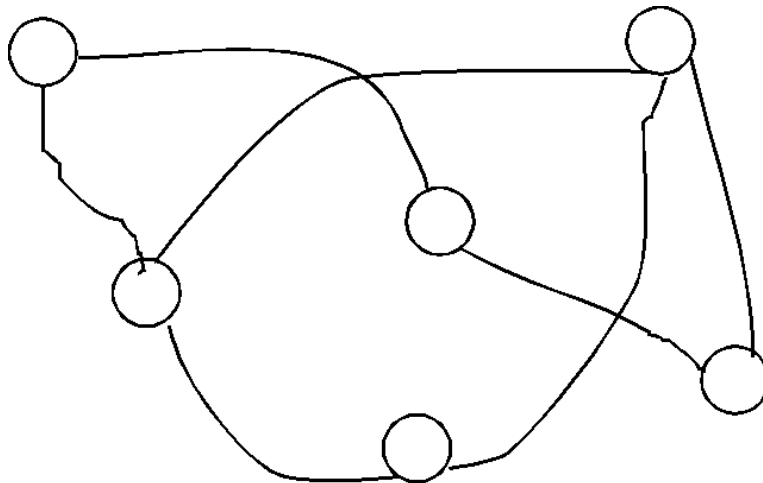
## Podstawowe pojęcia

Są dwa elementarne pojęcia teorii grafów:

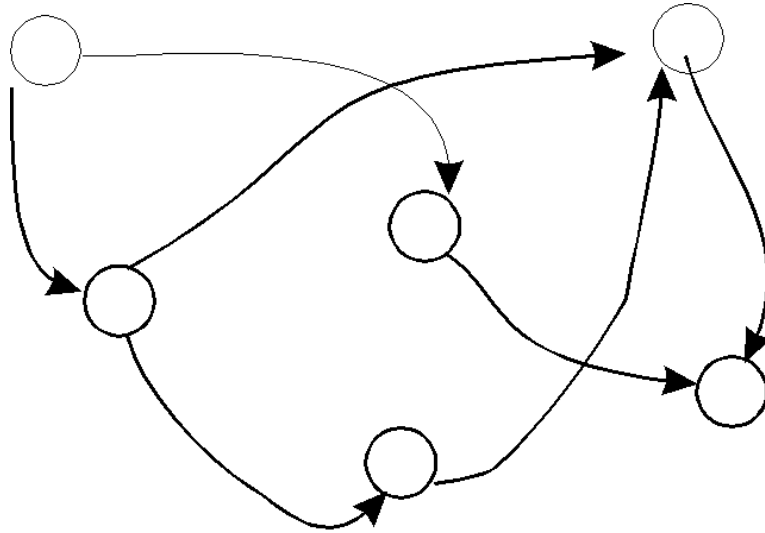
- wierzchołek - zaznaczany zazwyczaj kółkiem;
- krawędź - zaznaczana zazwyczaj kreską.

W podstawowej teorii krawędzie zawsze łączą ze sobą dokładnie dwa wierzchołki, przy czym wyróżniamy dwa podstawowe rodzaje grafów:

- zorientowane - z krawędziami reprezentowanymi krzywymi ze strzałkami;
- niezorientowane - z krawędziami reprezentowanymi krzywymi bez strzałek.



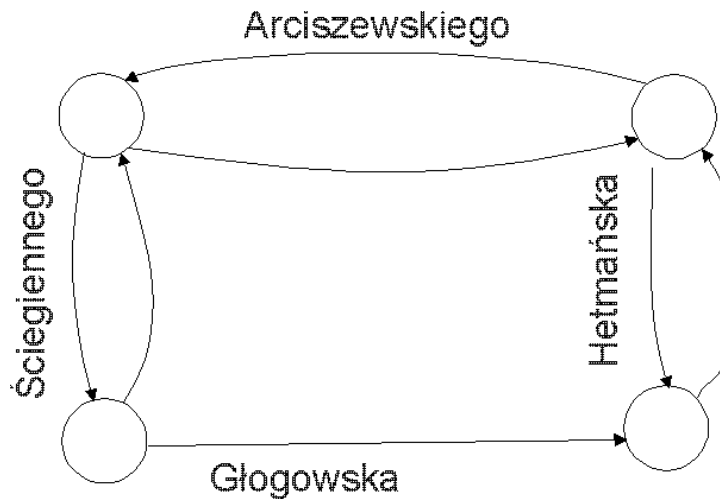
Graf niezorientowany



Graf zorientowany

## Komunikacja

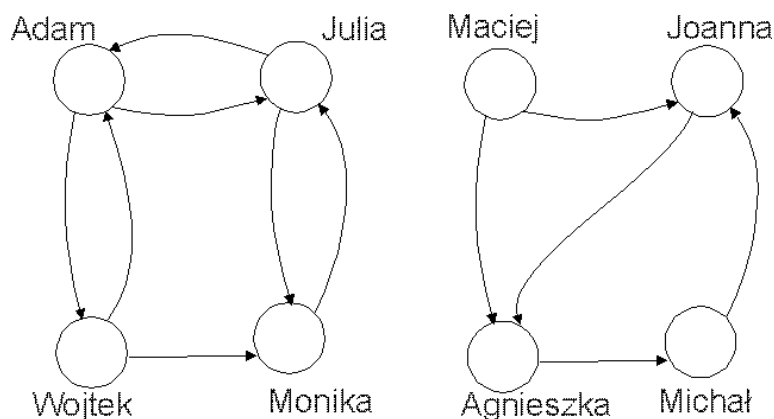
Chyba najprostszym przykładem grafu może być sieć dróg łączących miasta. Wierzchołki reprezentują tu poszczególne miasta a krawędzie bezpośrednie połączenia drogowe. Przypisanie nazw miast wierzchołkom grafu nazywamy etykietowaniem, a przypisywanie odległości drogowych krawędziom - etykietowaniem krawędzi. Od razu widać, że taki graf będzie nieskierowany ponieważ szosą można jeździć w obydwu kierunkach. Jednak w szczególnych sytuacjach oraz w przypadku planów miast będziemy mieć do czynienia z grafami skierowanymi, gdyż wiele dróg komunikacyjnych jest jednokierunkowych. W mieście możemy wierzchołkami grafu reprezentować skrzyżowania, a krawędziami ulice. Krawędzie poza długościami reprezentowanych ulic mogą jeszcze mieć przypisane nazwy.



Przykładowy graf reprezentujący aktualny układ komunikacyjny w naszej okolicy

## Znajomości

Grafy mogą też reprezentować niewidoczne gołym okiem powiązania. Takim przykładem niech będą znajomości w szkole. Dzieci w szkole są reprezentowane wierzchołkami grafu. Jeśli jedno dziecko zna imię drugiego to od wierzchołka reprezentującego znajomego do znanego biegnie skierowana krawędź grafu. Na przykład:



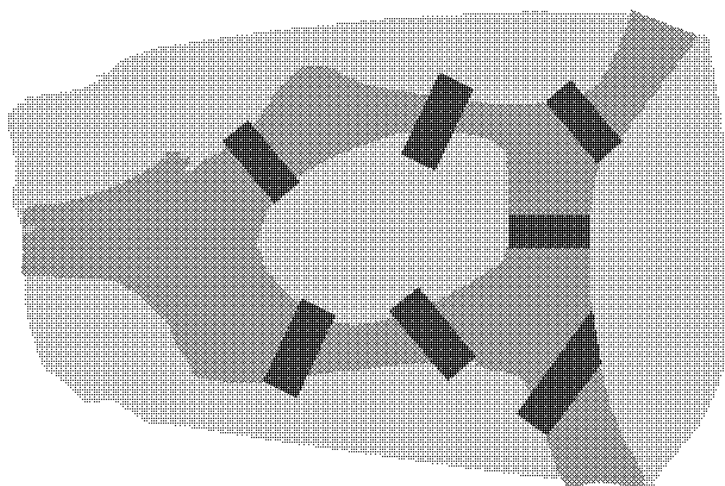
Z rysunku wynika, że nie wszyscy się znają a nawet istnieją dwie różne grupy nie znających się osób. To też jest jeden graf, o którym mówimy, że nie jest spójny i zawiera dwie składowe spójności.

Wracając jeszcze do przykładu z siecią ulic, gdy możemy z każdego miejsca przejechać do każdego innego to mówimy, że graf jest silnie spójny. Chyba dla każdego oczywiste jest, że ta własność powinna być spełniona w każdym mieście. Przy wielu zmianach komunikacyjnych może się zdarzyć, że nie będzie spełniona i wtedy zbadanie tej własności grafu wystarczy by wykryć błąd uniemożliwiający komunikację w mieście.

Również ciekawym przykładem jest graf odpowiadający sytuacji gdy każdy zna każdego. Odpowiada temu graf zawierający wszystkie możliwe połączenia pomiędzy parami wierzchołków. Nazywamy go kliką, co oznacza, że nie tylko my rozpatrywaliśmy zastosowanie grafu do odzwierciedlenia stosunków międzyludzkich.

## Słynne ścieżki

We wspaniałej książce matematycznej mego dzieciństwa "LILAVATI" autor podaje przykład grafu odzwierciedlającego połączenia komunikacyjne przez mosty w Królewcu:



Słynne zadanie o mostach w Królewcu (tak się nazywało gdy należało jeszcze do Polski, obecnie Kaliningrad) ułożył Euler w roku 1759. Postawił mianowicie pytanie, czy można po siedmiu mostach łączących dzielnicę miasta z wyspą na Pregole odbyć spacer w ten sposób, by przejść kolejno przez wszystkie mosty nie przechodząc po żadnym więcej niż jeden raz.

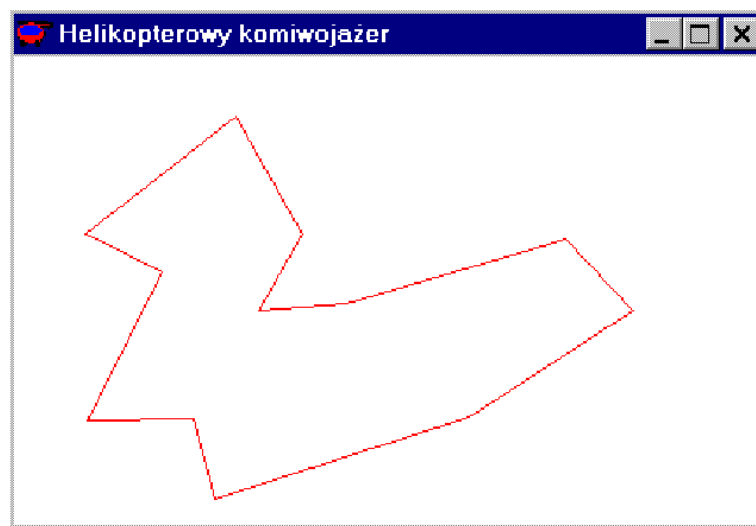
Proszę spróbować ale i tak się to nie uda, bo dla odpowiadającego temu grafowi nie ma tak zwanej ścieżki Eulera co łatwo udowodnić matematycznie. Łatwo nawet tak zaprogramować komputer, że dla zadanego grafu (np. można zadać układ mostów Poznania czy Szczecina) program szybko sprawdzi czy zadanie jest możliwe do wykonania czy nie.

Inną ścieżką jest ścieżka Hamiltona, która w odróżnieniu od ścieżki Eulera ma przebiegać przez wszystkie wierzchołki grafu.

Jeśli mamy powrócić w to samo miejsce to taką ścieżkę nazywamy cyklem.

## Komiwojażer

Szczególnym przypadkiem cyklu Hamiltona jest problem komiwojażera. Jego nazwa wzięła się z omawianej już interpretacji grafu jako sieci dróg czy ulic, z których każda etykietowana jest długością lub czasochłonnością podróży. Zgodnie z definicją cyklu Hamiltona należy więc znaleźć taką trasę, która przebiega przez wszystkie miejscowości i wraca do miejscowości wyjściowej. Odpowiada to więc dokładnie zadaniu komiwojażera, który na przykład rozwozi towary do sklepów. Jeśli taką trasę należy odbywać codziennie to choćby niewielkie skrócenie drogi komiwojażera prowadzi do znaczących oszczędności choćby na zużytych paliwie. I właśnie na znalezieniu najkrótszego cyklu Hamiltona polega to matematyczne zadanie komiwojażera.

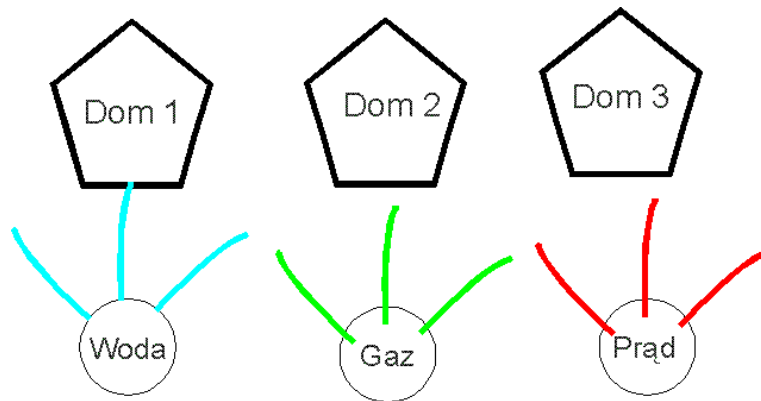


Zadanie to należy do grupy problemów optymalizacyjnych tj. takich, że poszukujemy rozwiązania, które daje najmniejszą lub największą wartość określonej cechy.

Często zadania optymalizacji nie dają się rozwiązać bez konieczności przejrzenia i porównania wielu rozwiązań. Tak też wydaje się być z problemem komiwojażera. Nie zostało to co prawda jeszcze udowodnione matematycznie ale gdyby tak nie było to również wiele innych problemów dawałoby się łatwo rozwiązać, co jest wysoce nieprawdopodobne wobec ogromu wysiłków podjętych dla znalezienia szybkich algorytmów dla wielu pokrewnych problemów.

## Bez przecinania

Mamy trzy domki i do każdego z nich należy podłączyć przewód wody, gazu i prądu ale tak by żadne dwa nie przecinały się.



Okazuje się, że to proste z pozoru zadanie jest nierozwiązywalne. Mamy tu do czynienia z grafem o sześciu wierzchołkach i połączeniach pomiędzy dwiema grupami po trzy wierzchołki w każdym. Jeśli nasze zadanie dałoby się rozwiązać oznaczałoby to, że mamy do czynienia z grafem planarnym, ale nasz graf nie jest planarny, co już dawno wykazano.

W praktyce badamy czy grafy są planarne i poszukujemy podziałów grafu na planarne podgrafy, gdy na przykład projektujemy ścieżki płytek drukowanych czy układów scalonych, które nie mogą się przecinać w jednej płaszczyźnie by nie było zwarć elektrycznych. Podobnie jak trudno projektować dom z połączeniami odległych pokoi bez korzystania z pokoi pośrednich. Pewne grafy nie dadzą się tu zastosować.

## Inny czy taki sam?

Dość trudno jest stwierdzić na podstawie odrębnych rysunków czy dwa grafy są zupełnie różne czy w gruncie rzeczy (po pominięciu etykiet) takie same (mówimy, że są izomorficzne).

Okazuje się, że również dla komputera zadanie porównywania grafów jest prawie równie niełatwe jak zadanie komiwojażera.

Ciekawym pytaniem jest ile różnych grafów można utworzyć dla zadanej liczby wierzchołków. Nie zawsze umiemy na nie odpowiedzieć z użyciem własnej głowy i często uciekamy się do pomocy komputera by wyznaczał te liczby wyznaczając wprost grafy dla kolejno rosnących liczb lub dla wielkości losowych.

## Ilu sąsiadów?

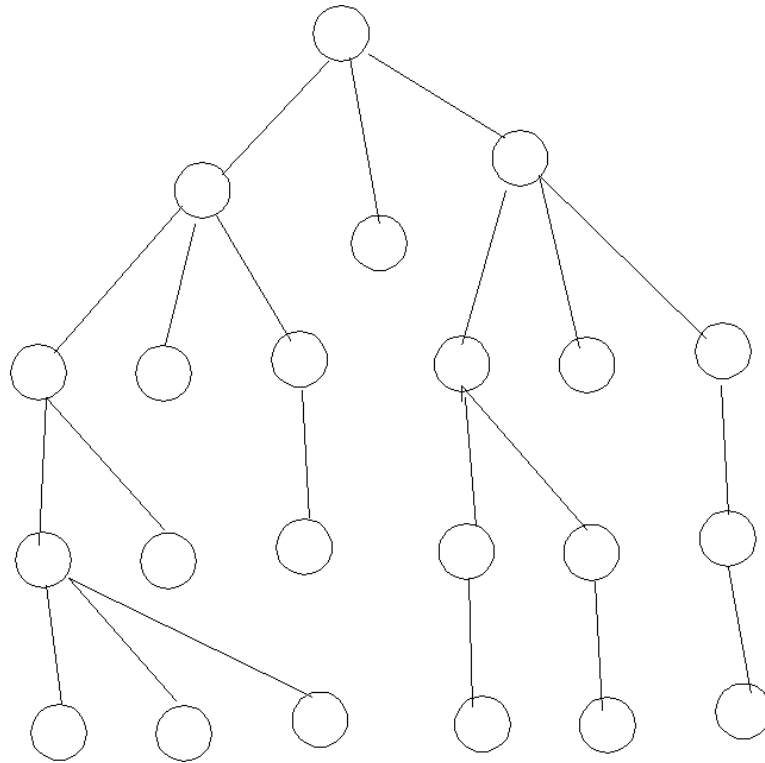
Można też zajmować się grafami, które mają ograniczoną lub ściśle określoną liczbę wierzchołków sąsiadujących z każdym. Odpowiada to na przykład konstrukcji pokoi w budynkach lub części z jakich składa się nasz świat i my sami.

Jeśli połączymy to z wyznaczaniem różnych grafów z poprzedniego rozdziału uzyskamy odpowiedzi na szereg ciekawych pytań o budowie materii, na przykład różnych kryształów.

## Drzewa i lasy

Szczególnym rodzajem grafu są drzewa. Nazwa bierze się stąd, że graf taki można narysować tak jak drzewo od korzenia aż po liście. Z korzenia wychodzą konary, które dzielą się na gałęzie, a następnie gałązki by zakończyć się liśćmi. W takich grafach nie występują cykle, to jest z każdego miejsca do każdego innego można dojść tylko jedną drogą.

Drzewa mają ogromne zastosowania w informatyce do szybkiego wyszukiwania informacji z ogromnego ich zbioru, wtedy stosujemy zazwyczaj drzewa binarne tj. takie, że z jednego wierzchołka drzewa w dół odchodzą co najwyżej dwie krawędzie.



Lasem nazywamy graf, który składać się może z wielu drzew.

## Matematyczny zapis dla grafów

Przedstawianie grafów w postaci rysunków jest bardzo pogładowe ale można w ten sposób przedstawiać co najwyżej przykłady grafów.

Matematycy wymyślili dla grafów notację, która pozwala określać różne własności grafów.

Grafem nazywamy więc parę  $(V, E)$  gdzie  $V$  jest zbiorem wierzchołków a  $E$  zbiorem krawędzi. Dla grafu niezorientowanego  $E$  jest zbiorem dwuelementowych zbiorów, a każdy z jego elementów pochodzi ze zbioru wierzchołków. W przypadku grafu zorientowanego mamy do czynienia z relacją:  $E$  nad parą elementów ze zbioru  $V$ . (wtedy ważna jest kolejność)

## Książki o grafach

Sz.Jeleński "LILAVATI", Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa 1971.

Sz.Jeleński "Śladami Pitagorasa", Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1995.

"Encyklopedia szkolna - matematyka",

Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa, 1989.

R.S.Garfinkel, G.L.Nemhauser "Programowanie całkowitoliczbowe", Państwowe Wydawnictwa Naukowe, Warszawa 1978.

A.V.Aho, J.E.Hopcroft, J.D.Ullman "Projektowanie i analiza algorytmów komputerowych", Państwowe Wydawnictwa Naukowe, Warszawa 1983.

N.Deo "Teoria grafów i jej zastosowania w technice i informatyce", Państwowe Wydawnictwa Naukowe, Warszawa, 1980.

J.L.Kulikowski "Zarys teorii grafów", Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1986.

E.M.Reingold, J.Nievergelt, N.Deo "Algorytmy kombinatoryczne", Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1985.

K.T.Balińska "Algorithms for random graphs with bounded degree" (Algorytmy dla losowych grafów z ograniczonym stopniem wierzchołków), Politechnika Poznańska, Poznań, 1996.

J.Błazewicz "Złożoność obliczeniowa algorytmów i problemów szeregowania zadań", Politechnika Poznańska, Poznań, 1979.

W.Lipski "Kombinatoryka dla programistów", Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1982.

J.Błazewicz "Złożoność obliczeniowa problemów kombinatorycznych", Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1988.