

Teoria grafów dla małolatów

Andrzej Przemysław Urbański
Instytut Informatyki
Politechnika Poznańska

Wstęp

- Matematyka to wiele różnych dyscyplin
 - Bowiem świat jest bardzo skomplikowany
 - wymaga rozważenia różnych punktów widzenia.
- **Jakie znacie dyscypliny matematyczne?**
- Taką dyscypliną jest **teoria grafów**
 - zajmuje się opisywaniem połączeń między rzeczami.
 - obojętne co to są za rzeczy czy domy łączące się siecią ulic, czy komputery połączone kablami lub satelitami w sieć komputerową

Podstawowe pojęcia

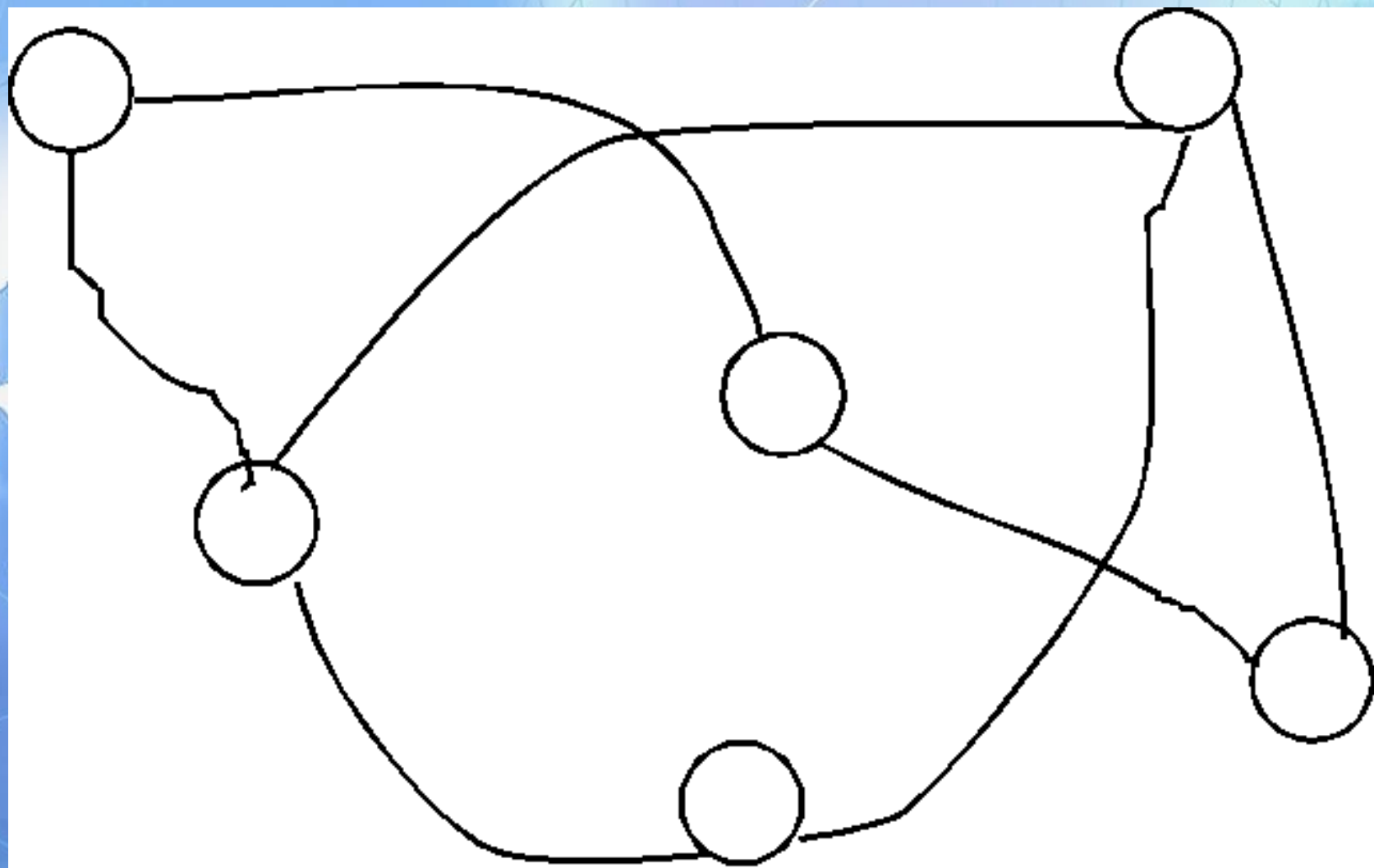
Elementarne pojęcia teorii grafów:

- **wierzchołek** - zaznaczany zazwyczaj kółkiem;
- **krawędź** - zaznaczana zazwyczaj kreską.

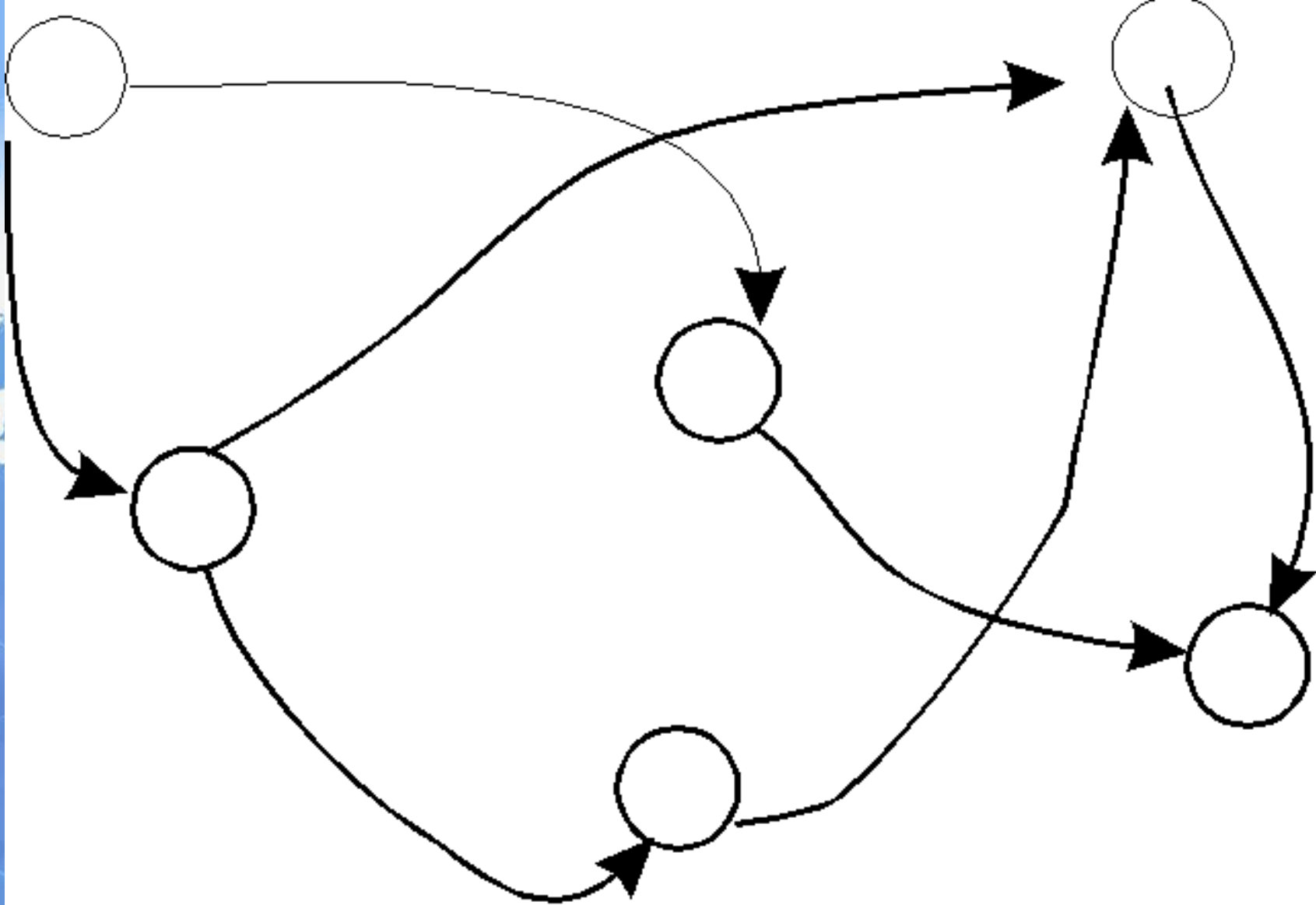
Często również stosuje się tzw. **etykiety** zarówno do wierzchołków jak krawędzi. Mogą one służyć ich rozróżnieniu lub oznaczać koszt.

Krawędzie łączą ze sobą dokładnie dwa wierzchołki, przy czym wyróżniamy dwa podstawowe rodzaje grafów:

- **zorientowane** - z krawędziami reprezentowanymi krzywymi ze strzałkami;
- **niezorientowane** - z krawędziami reprezentowanymi krzywymi bez strzałek.



Graf niezorientowany



Graf zorientowany

Komunikacja

Sieć dróg łączących miasta

- Graf nieskierowany

Sieć dróg mieście

- Skrzyżowania to wierzchołki grafu
- Ulice to krawędzie

Przykładowy graf połączeń drogowych

Grabowa



Radar

Mapa sal

Reklamna Gracze

Wzrost

Wzrost: 170

Typ: do teleportu

Zasięg: 10

Mapa Labiryntu

Ważne informacje

Energia

Twoje statystyki

Ważność: 1271 punktów

Przebieg choroby

Zaczniemy: Północ

Twoje najwyższy w tej chwili

Woj	Avant	Strona	Wierzy	Środki	Przebieg
Ważność		100%	100%	100%	100%

Przebieg choroby

Ostatnie informacje o wszystkim, co jest dostępne. Jeśli nie masz 10 leków nie przygotowałeś. Zjedź później.

Przebieg choroby

Ważność: 1271 punktów

Ważność: 1271 punktów

Ważne informacje

Ważność: 1271 punktów

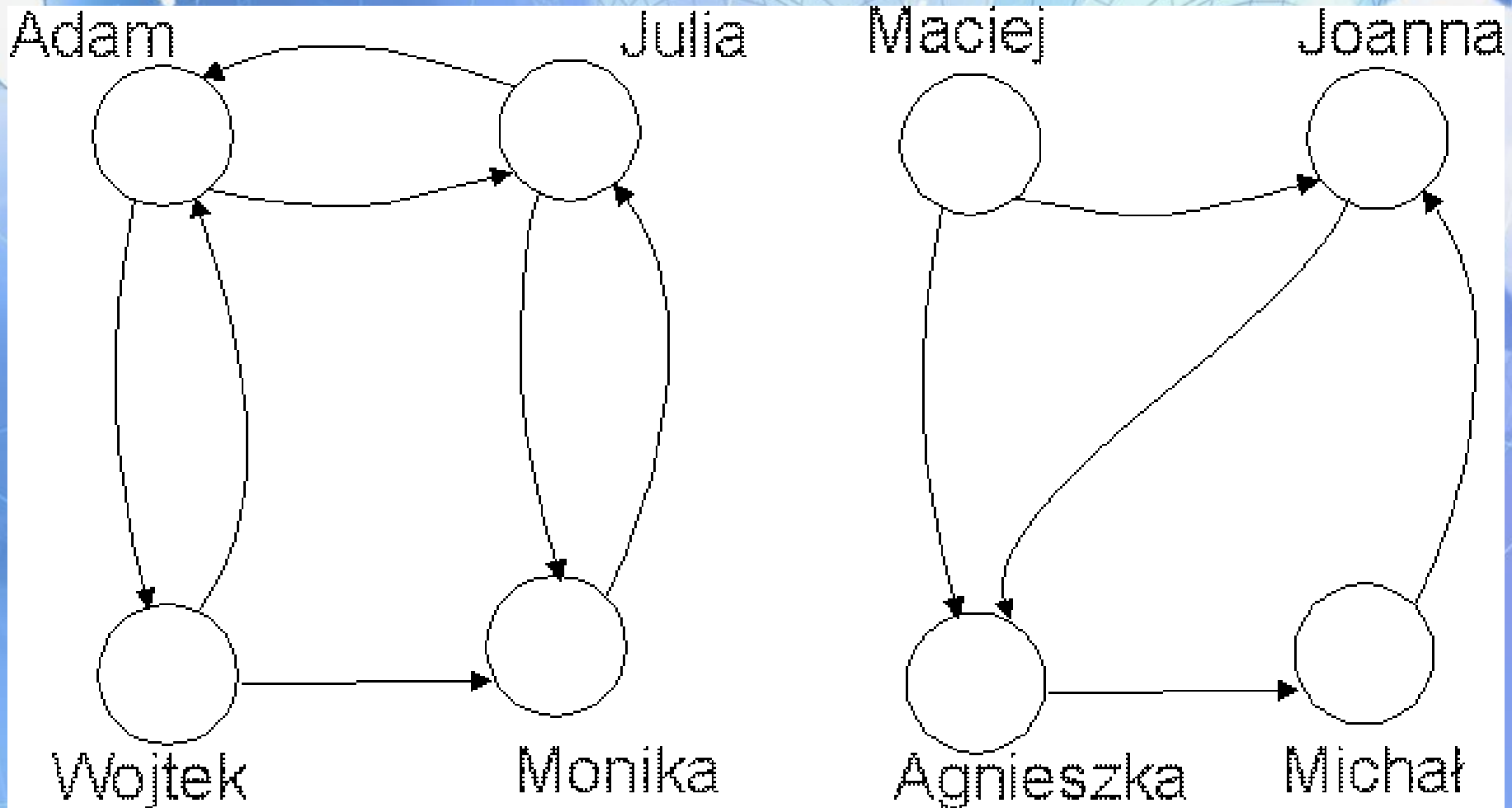
- Przebieg choroby**
- Ważność
 - Avanta
 - Strona
 - Wierzy
 - Środki
 - Przebieg
 - Ważność
 - Avanta
 - Strona
 - Wierzy
 - Środki
 - Przebieg
 - Ważność
 - Avanta
 - Strona
 - Wierzy
 - Środki
 - Przebieg

Znajomości

Niewidoczne gołym okiem powiązania.

- Znajomości w szkole.
 - Dzieci to wierzchołki grafu.
 - Jeśli jedno dziecko zna drugie to mamy krawędź grafu

Graf szkolnych znajomości





Co jeszcze może
przedstawić graf?

Co jest wierzchołkiem
a co krawędzią?

Własności grafów

- Grafy spójne
 - Np. Graf znajomości jest niespójny i zawiera dwie składowe spójności
- Graf silnie spójny
 - W przypadku sieci ulic, gdy możemy z każdego miejsca przejechać do każdego innego to mówimy, że graf jest silnie spójny.
- Klika
 - „każdy zna każdego”

Słynne ścieżki - Eulera

Euler w roku 1759

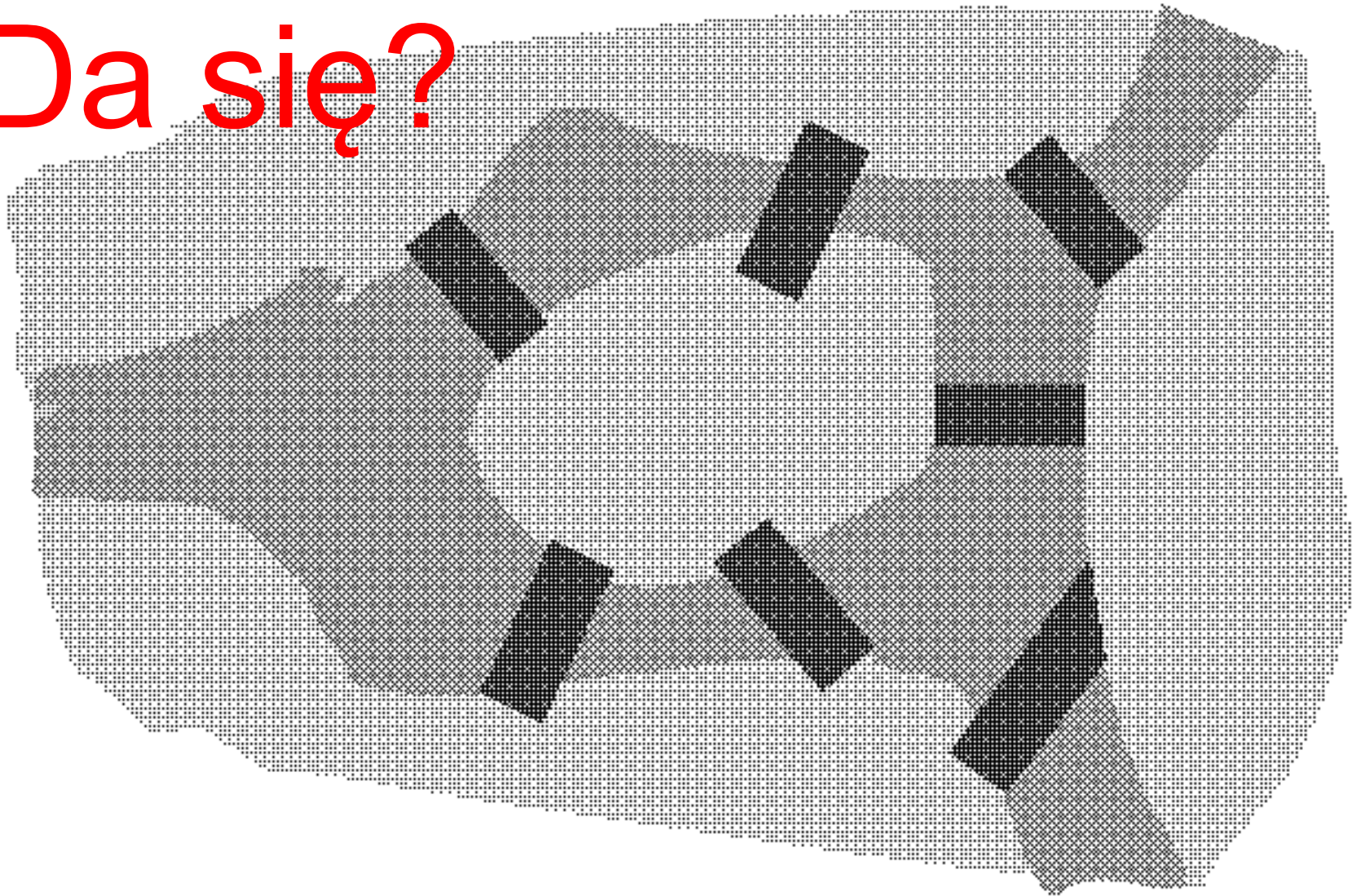
- siedmiu mostach łączących dzielnice miasta Królewca z wyspą na Pregole
- przejść kolejno przez wszystkie mosty nie przechodząc po żadnym więcej niż jeden raz.

Hamiltona (ścieżka) przebiega przez wszystkie wierzchołki grafu.

Jeśli mamy powrócić w to samo miejsce to taką **ścieżkę** nazywamy **cyklem**.

Przez każdy most dokładnie raz

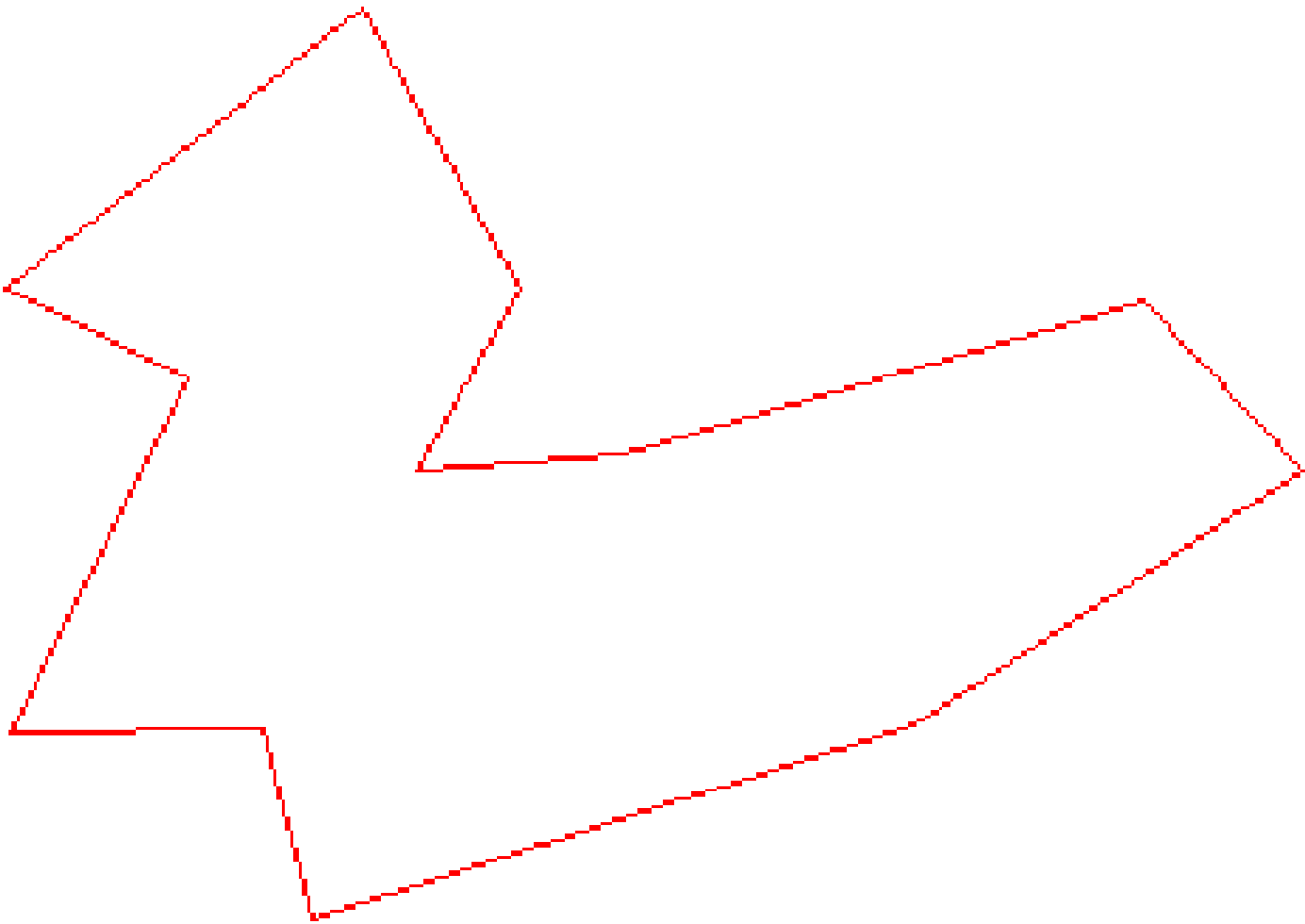
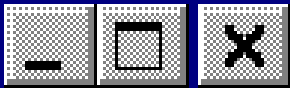
Da się?



Droga komiwojażera

- Szczególnym przypadkiem cyklu Hamiltona jest problem komiwojażera.
 - „Znaleźć cykl Hamiltona o najmniejszym koszcie”
 - Zadanie to należy do grupy problemów optymalizacyjnych tj. takich, że poszukujemy rozwiązania, które daje najmniejszą lub największą wartość określonej cechy.
- Zadania optymalizacji często prowadzą do eksplozji kombinatorycznej

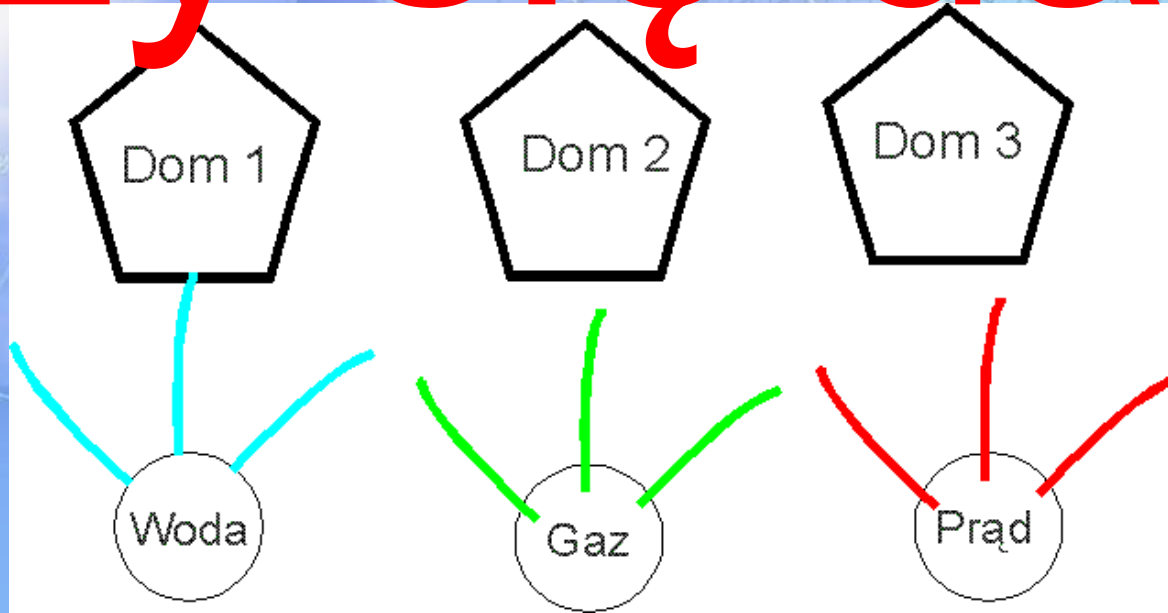
Helikopterowy komiwojazer



Grafy planarne

Mamy trzy domki i do każdego z nich należy podłączyć przewód wody, gazu i prądu ale tak by żadne dwa nie przecinały się.

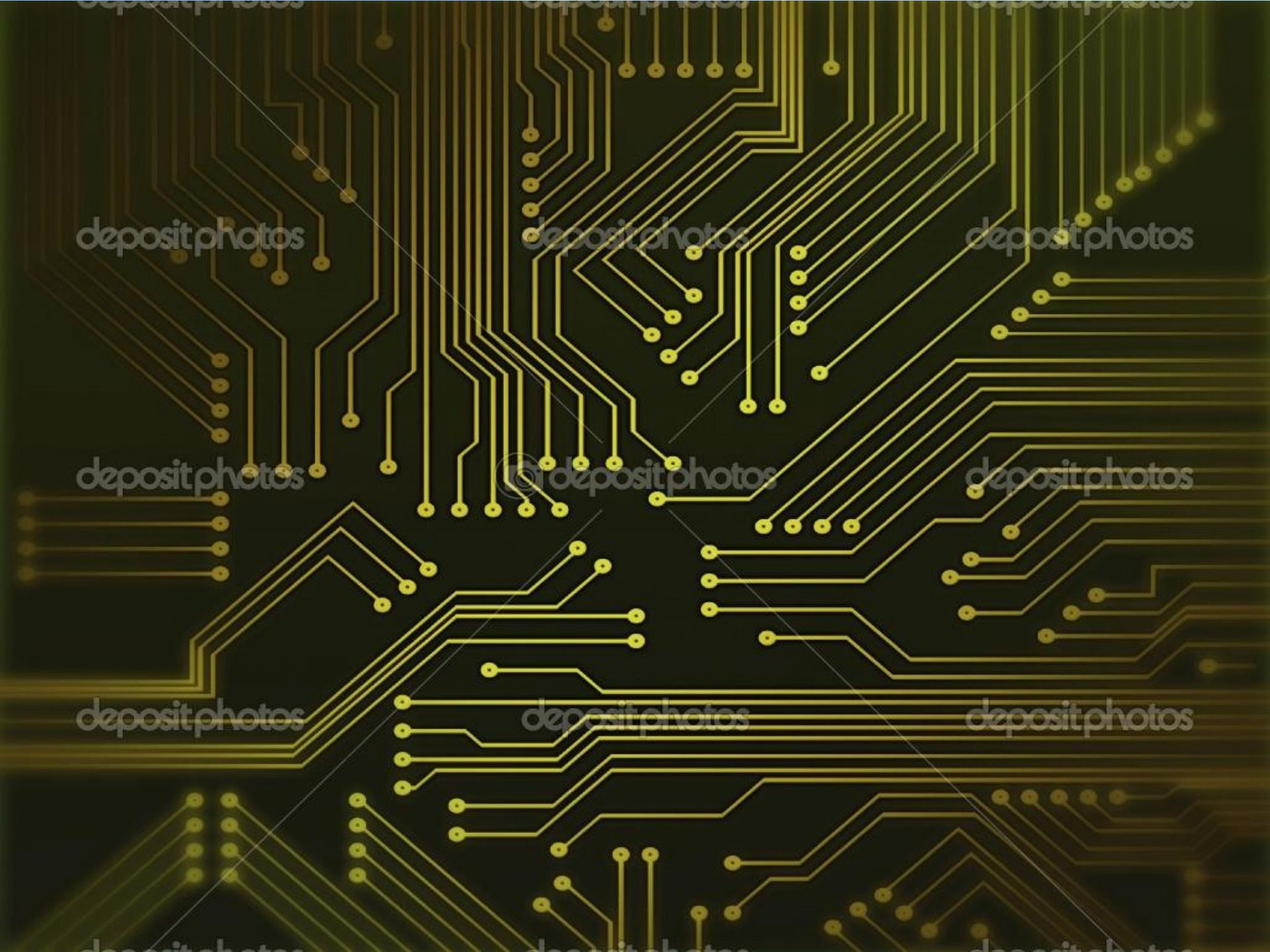
Czy się da?



Zastosowanie grafów planarnych

Grafy planarne mają zastosowanie np. w projektowaniu ścieżek układów scalonych

- Na jednym poziomie ścieżki muszą tworzyć graf planarny gdzie elementy elektroniczne to wierzchołki, a ścieżki przewodzące to krawędzie
- Wyjściem są wielowarstwowe płytki drukowane, w których jeden nie planarny graf rozbija się na wiele planarnych warstw łączonych ze sobą w pionie



Inny czy taki sam?

Dość trudno jest stwierdzić na podstawie odręcznych rysunków czy dwa grafy są zupełnie różne czy w gruncie rzeczy (po pominięciu etykiet) takie same (mówimy, że są izomorficzne).

Komputery też mają z tym problem

Ile różnych grafów?

Ciekawym pytaniem jest ile różnych grafów można utworzyć dla zadanej liczby wierzchołków. Odpowiedź znajduje zastosowanie w chemii i biologii molekularnej

Ilu sąsiadów? – stopień wierzchołków

Można też zajmować się grafami, które mają ograniczoną lub ściśle określoną liczbę wierzchołków sąsiadujących z każdym.

Odpowiedzi na szereg ciekawych pytań o budowie materii, na przykład różnych kryształów.

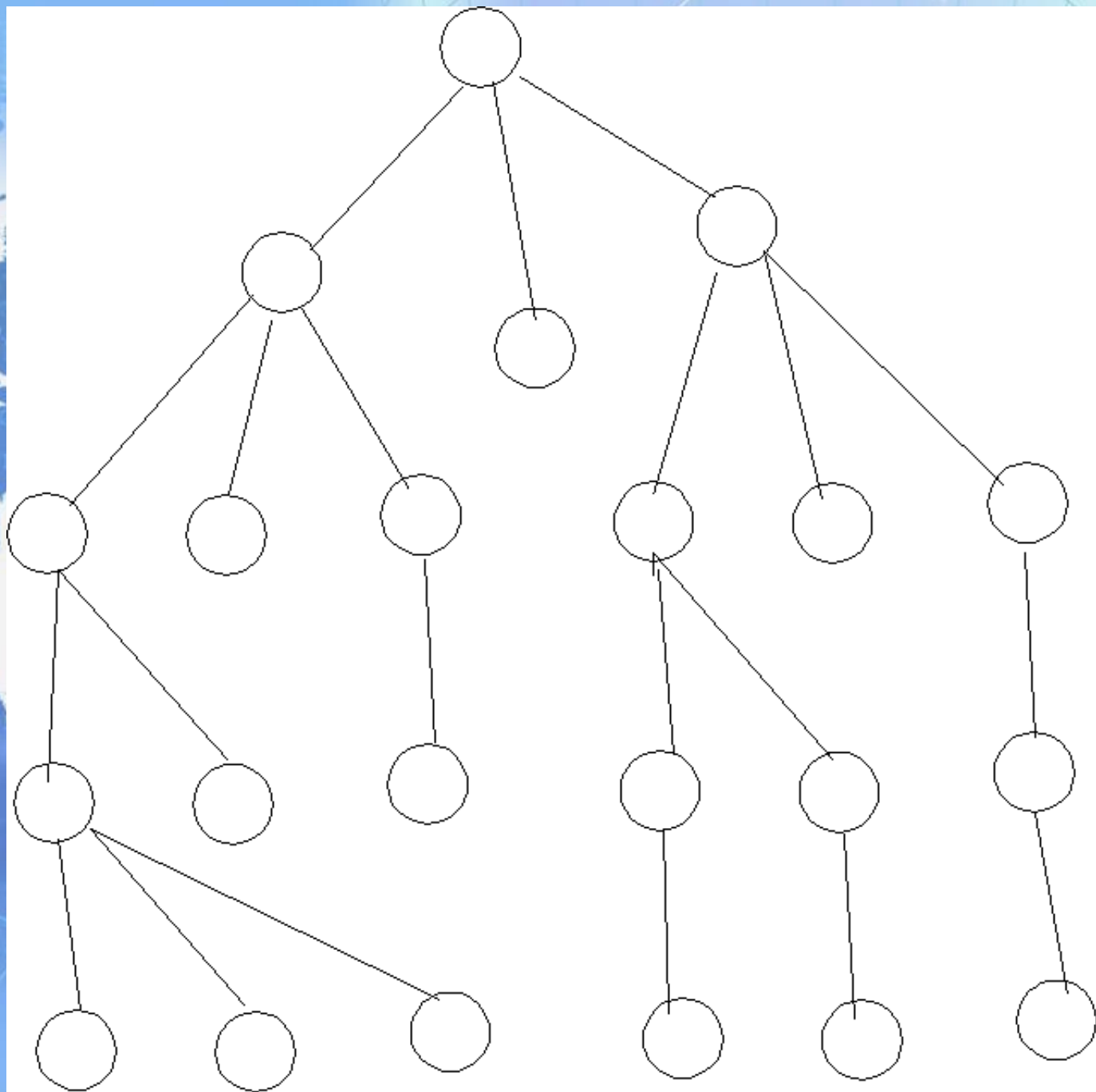
Cykl Eulera istnieje tylko w grafie, który ma nie więcej niż dwa wierzchołki o nieparzystym stopniu. Wtedy jeden z nich początkiem, a drugi końcem

A co jeśli graf ma jeden wierzchołek nieparzysty?

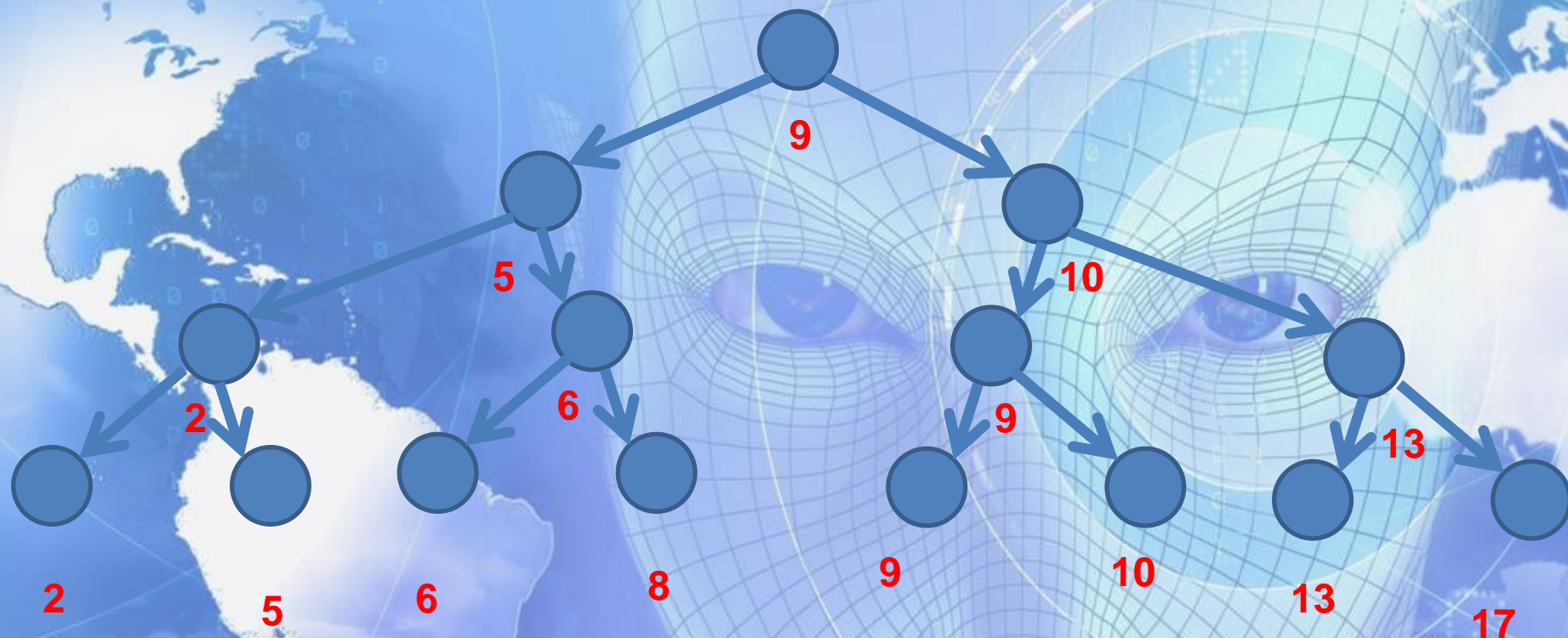
Drzewa

Szczególnym rodzajem grafu są drzewa.

Taki graf można narysować tak jak drzewo od korzenia aż po liście. Z korzenia wychodzą konary, które dzielą się na gałęzie, a następnie gałązki by zakończyć się liśćmi. W takich grafach nie występują cykle, to jest z każdego miejsca do każdego innego można dojść tylko jedną drogą.



Wykorzystanie drzewa do wyszukiwania liczby



Gdy szukana większa niż w węźle to w prawo

A jeśli mamy szukać napisów np. jak Google?

Matematyczny zapis dla grafów

Grafem nazywamy więc parę (V, E) gdzie V jest zbiorem wierzchołków a E zbiorem krawędzi.

Dla grafu niezorientowanego E jest zbiorem dwuelementowych zbiorów, a każdy z jego elementów pochodzi ze zbioru wierzchołków.

W przypadku grafu zorientowanego mamy do czynienia z relacją: E nad parą elementów ze zbioru V (wtedy ważna jest kolejność)



Dziękuję za uwagę

„Park Teorii Grafów”

Czeka na Was